



2024年高考真题 + **2024**年模拟新题 ◀ **最新**

基于历年高考真题的精准分类 ◀ **精准**

对点集中训练，针对性突破高考易错点，重难点 ◀ **高效**

全品

主编
肖德好

高力 小练习

天津出版传媒集团
天津人民出版社

高考 **数学**



第一部分 集合、常用逻辑用语、不等式

考点 1	集合	1
考点 2	常用逻辑用语	3
考点 3	不等式的性质、基本不等式	5
考点 4	二次函数与一元二次方程、不等式	7



第二部分 函数与导数

考点 5	函数的概念及其表示	8
考点 6	函数的基本性质	10
考点 7	幂函数、指数函数、对数函数	13
考点 8	函数的图象	15
考点 9	函数的零点	17
考点 10	函数与数学模型	19
考点 11	导数的概念及其意义、导数的运算	21
考点 12	导数的应用	23
题型 1	函数、导数压轴小题	25
题型 2	导数的综合应用	27
名校联考模拟练（一） 2024 届江西五市九校 2 月联考		31



第三部分 三角函数、平面向量、复数、解三角形

考点 13	三角函数的概念、同角三角函数的基本关系式	33
考点 14	三角恒等变换	35
考点 15	三角函数的图象与性质	37
考点 16	函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$	39
考点 17	余弦定理、正弦定理	41
考点 18	平面向量的线性运算、基本定理及坐标表示	43
考点 19	平面向量的数量积	45
考点 20	复数	47
题型 3	解三角形的综合问题	48
名校联考模拟练（二） 2024 届浙江名校协作体返校考		51



第四部分 数列

考点 21	数列的概念及递推公式、通项公式	53
考点 22	等差数列的基本运算及前 n 项和	55
考点 23	等比数列的基本运算及前 n 项和	57
考点 24	数列的综合问题小题练	59
题型 4	数列综合解答题	61
名校联考模拟练（三） 2024 届南京六校期初调研		65



第五部分 立体几何与空间向量

考点 25	立体图形的直观图、空间几何体的表面积与体积	67
考点 26	空间几何体与球	70
考点 27	空间点、线、面间的位置关系	72
考点 28	空间直线、平面的平行	74
考点 29	空间直线、平面的垂直	76
考点 30	空间角与距离	78
题型 5	空间中的截面、动态问题	80
题型 6	立体几何解答题	82
题型 7	折叠问题与探索性问题	86
名校联考模拟练(四) 2024 届江西八所重点中学 4 月联考		88



第六部分 解析几何

考点 31	直线与圆的方程	90
考点 32	直线与圆、圆与圆的位置关系	92
考点 33	椭圆	94
考点 34	双曲线	96
考点 35	抛物线	98
考点 36	直线与圆锥曲线的位置关系	100
题型 8	圆锥曲线的综合问题(一) 求值与证明问题	102
题型 9	圆锥曲线的综合问题(二) 定点、定值问题	105
题型 10	圆锥曲线的综合问题(三) 最值、范围问题	107
题型 11	圆锥曲线的综合问题(四) 探索性问题	109
名校联考模拟练(五) 2024 届湖北省十一校第二次联考		111



第七部分 统计与概率

考点 37	随机抽样、用样本估计总体	113
考点 38	成对数据的统计分析	115
考点 39	排列与组合	116
考点 40	二项式定理	118
考点 41	随机事件的概率、古典概型	119
考点 42	事件的独立性、条件概率与全概率公式	121
考点 43	离散型随机变量的分布列、期望和方差	124
考点 44	二项分布、超几何分布与正态分布	125
考点 45	数学文化与数学情境	127
题型 12	离散型随机变量分布列、期望与方差	130
题型 13	成对数据的统计分析解答题	134
题型 14	创新题型	137
名校联考模拟练(六) 2024 届安徽省六校高三 2 月素养测试		139

考点1 集合

真题导向练

- [2024·天津卷] 集合 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{1,2,3,4\}$ B. $\{2,3,4\}$
 C. $\{2,4\}$ D. $\{1\}$
- [2024·北京卷] 已知集合 $M=\{x|-3 < x < 1\}$, $N=\{x|-1 \leq x < 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 A. $\{x|-1 \leq x < 1\}$ B. $\{x|x > -3\}$
 C. $\{x|-3 < x < 4\}$ D. $\{x|x < 4\}$
- [2024·新课标I卷] 已知集合 $A=\{x|-5 < x^3 \leq 5\}$, $B=\{-3,-1,0,2,3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{-1,0\}$ B. $\{2,3\}$
 C. $\{-3,-1,0\}$ D. $\{-1,0,2\}$
- [2022·北京卷] 已知全集 $U=\{x|-3 < x < 3\}$, 集合 $A=\{x|-2 < x \leq 1\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 A. $(-2,1]$
 B. $(-3,-2) \cup [1,3)$
 C. $[-2,1)$
 D. $(-3,-2] \cup (1,3)$
- [2023·全国乙卷] 设集合 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|x < 1\}$, $N=\{x|-1 < x < 2\}$, 则 $\{x|x \geq 2\} =$ ()
 A. $\complement_U(M \cup N)$ B. $N \cup (\complement_U M)$
 C. $\complement_U(M \cap N)$ D. $M \cup (\complement_U N)$
- [2024·全国甲卷] 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$, $B=\{x|\sqrt{x} \in A\}$, 则 $\complement_A(A \cap B) =$ ()
 A. $\{1,4,9\}$ B. $\{3,4,9\}$
 C. $\{1,2,3\}$ D. $\{2,3,5\}$
- [2023·全国甲卷] 设集合 $A=\{x|x=3k+1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{x|x=3k+2, k \in \mathbf{Z}\}$, U 为整数集, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()
 A. $\{x|x=3k, k \in \mathbf{Z}\}$
 B. $\{x|x=3k-1, k \in \mathbf{Z}\}$
 C. $\{x|x=3k-2, k \in \mathbf{Z}\}$
 D. $\emptyset$
- [2020·全国卷III] 已知集合 $A=\{(x,y)|x, y \in \mathbf{N}^*, y \geq x\}$, $B=\{(x,y)|x+y=8\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()
 A. 2 B. 3
 C. 4 D. 6
- [2023·新课标II卷] 设集合 $A=\{0,-a\}$, $B=\{1,a-2,2a-2\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 $a =$ ()
 A. 2 B. 1
 C. $\frac{2}{3}$ D. -1

模拟预测练

- [2024·山西晋城一模] 设集合 $M=\{x|-1 < x < 5\}$, $N=\{y|y=x-1, x \in M\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 A. $(-2,5)$ B. $(-1,4)$
 C. $(-2,4)$ D. $(-1,5)$
- [2024·湖南长沙模拟] 已知集合 $M=\{x|x < 1\}$, $N=\{x|x^2 < 1\}$, 则 ()
 A. $M=N$ B. $M \subseteq N$
 C. $N \subseteq M$ D. $M \cap N = \emptyset$

12. [2024·南昌一模] 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x^2 - 2x - 4 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}_+ | x < 10\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

13. [2024·安徽合肥一六八中学期末] 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $B \cap (\complement_U A) =$ ()

A. $\{4\}$ B. $\{2, 4\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 3, 5\}$

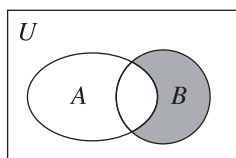
14. [2024·河北衡水冀州中学模拟] 已知全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x \leq 8\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3, 5\}$, 则集合 B 为 ()

A. $\{2, 4, 6, 7\}$
B. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
C. $\{0, 2, 4, 6, 7, 8\}$
D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

15. [2024·广东茂名一模] 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, $C = A \cap B$, 则集合 C 的子集个数为 ()

A. 2 B. 3
C. 4 D. 8

16. [2024·福建福州模拟] 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{y | y = e^x + 2, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | y = \lg(x-1)\}$, 则图中阴影部分所表示的集合为 ()



A. $[1, 2]$ B. $(1, 2]$
C. $(1, 2)$ D. $[1, 2)$

17. [2024·浙江嘉兴一中模拟] 已知集合 $A = \left\{ \sin \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbf{N}, \text{ 且 } 0 \leq k \leq 4 \right\}$, 则集合 A 的元素个数为 ()

A. 3 B. 2
C. 4 D. 5

18. (多选题) [2024·江西吉安模拟] 下列选项中的两个集合相等的为 ()

A. $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 2(n+1), n \in \mathbf{Z}\}$
B. $P = \{x | x = 2n-1, n \in \mathbf{N}_+\}$, $Q = \{x | x = 2n+1, n \in \mathbf{N}_+\}$
C. $P = \{x | x^2 - x = 0\}$, $Q = \left\{ x \mid x = \frac{1+(-1)^n}{2}, n \in \mathbf{Z} \right\}$
D. $P = \{x | y = x+1\}$, $Q = \{(x, y) | y = x+1\}$

19. [2024·河南驻马店一模] 设 $A = \{(x, y) | ax + y - 3 = 0\}$, $B = \{(x, y) | x - y - b = 0\}$, 若 $A \cap B = \{(2, 1)\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

20. [2024·合肥一模] 已知集合 $A = \{x | x^2 \leq 4\}$, $B = \{x | a-1 \leq x \leq a+1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围是 _____.

21. [2024·江西宜春一模] 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[1.5] = 1$, $[-1.5] = -2$. 若集合 $A = \{x | x^2 - [x] - 1 = 0\}$, $B = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 4 \right\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

22. [2024·浙江绍兴模拟] 已知集合 $A = \{x | x^2 + mx \leq 0\}$, $B = \left\{ -\frac{1}{3}, m-1 \right\}$, 若 $A \cap B$ 有 4 个子集, 则实数 m 的最小值是 _____.

考点2 常用逻辑用语

真题导向练

- [2023·天津卷] “ $a^2=b^2$ ”是“ $a^2+b^2=2ab$ ”的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充分必要条件
 - 既不充分又不必要条件
- [2024·天津卷] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^3=b^3$ ” 是 “ $3^a=3^b$ ” 的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2024·全国甲卷] 设向量 $a=(x+1, x)$, $b=(x, 2)$, 则 ()
 - $x=-3$ 是 $a \perp b$ 的必要条件
 - $x=-3$ 是 $a \parallel b$ 的必要条件
 - $x=0$ 是 $a \perp b$ 的充分条件
 - $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $a \parallel b$ 的充分条件
- [2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3=x$, 则 ()
 - p 和 q 都是真命题
 - $\neg p$ 和 q 都是真命题
 - p 和 $\neg q$ 都是真命题
 - $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
- [2024·北京卷] 设 a, b 是向量, 则 “ $(a+b) \cdot (a-b)=0$ ” 是 “ $a=b$ 或 $a=-b$ ” 的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2020·浙江卷] 已知空间中不过同一点的三条直线 l, m, n , “ l, m, n 共面” 是 “ l, m, n 两两相交” 的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充分必要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2021·北京卷] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 “ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增” 是 “ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ” 的 ()
 - 充分而不必要条件
 - 必要而不充分条件
 - 充分必要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2023·北京卷] 若 $xy \neq 0$, 则 “ $x+y=0$ ” 是 “ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2$ ” 的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2023·全国甲卷] “ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ” 是 “ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ” 的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- [2023·新课标Ⅰ卷] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()
 - 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 - 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 - 甲是乙的充要条件
 - 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

模拟预测练

11. [2024·湖南邵阳模拟] 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 < 0$ ”的否定为 ()
- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 > 0$
- B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 \leq 0$
- C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 < 0$
- D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 4x + 6 \geq 0$
12. [2024·江西部分重点中学模拟] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x - 2| < 1$ ”是“ $1 < x < 2$ ”的 ()
- A. 充要条件
- B. 既不充分也不必要条件
- C. 充分不必要条件
- D. 必要不充分条件
13. [2024·山西吕梁二模] 设命题 p : 对任意的等比数列 $\{a_n\}$, $\{a_n + a_{n+1}\}$ 都是等比数列, 则命题 p 的否定为 ()
- A. 对任意的非等比数列 $\{a_n\}$, $\{a_n + a_{n+1}\}$ 都是等比数列
- B. 对任意的等比数列 $\{a_n\}$, $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不是等比数列
- C. 存在一个等比数列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是等比数列
- D. 存在一个等比数列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不是等比数列
14. [2024·浙江金华模拟] 设 $\alpha \in (0, \pi)$, 条件 p : $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 条件 q : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 p 是 q 的 ()
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件
15. [2024·石家庄一模] 已知命题 p : $\forall x \in (0, +\infty), e^x > \ln x$, 则 ()
- A. p 是真命题, p 的否定为“ $\exists x \in (0, +\infty), e^x \leq \ln x$ ”
- B. p 是真命题, p 的否定为“ $\exists x \in (-\infty, 0), e^x \leq \ln x$ ”
- C. p 是假命题, p 的否定为“ $\exists x \in (0, +\infty), e^x \leq \ln x$ ”
- D. p 是假命题, p 的否定为“ $\exists x \in (-\infty, 0), e^x \leq \ln x$ ”

16. [2024·北京东城区一模] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则“ $0 < a_1 < d$ ”是“ $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为递增数列”的 ()
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件
17. [2024·安徽合肥模拟] 设 α, β 是两个平面, a, b 是两条直线, 则 $\alpha // \beta$ 的一个充分条件是 ()
- A. $a // \alpha, b // \beta, a // b$
- B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, a \perp b$
- C. $a \perp \alpha, b \perp \beta, a // b$
- D. $a // \alpha, b // \beta, a$ 与 b 相交
18. [2024·江苏南通模拟] 若命题“ $\exists a, b \in \mathbf{R}, a - \cos b \leq b - \cos a$ ”为假命题, 则 a, b 的大小关系为 ()
- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $a \leq b$
- D. $a \geq b$
19. [2024·南昌一模] 已知 $p: \ln(a - 1) > 0, q: \exists x > 0, \frac{x^2 + 1}{x} \leq a$, 则 p 是 q 的 ()
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件
20. (多选题)[2024·重庆七校联考] 下列命题中, 为真命题的是 ()
- A. $\forall x \in \mathbf{Q}, |x| \notin \mathbf{Z}$
- B. $\exists x \in \mathbf{Z}$, 使 x 同时被 3 和 4 整除
- C. $\forall x \in \mathbf{R}, |x| > 0$
- D. $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x - 3 = 0$
21. [2024·湖北武汉期末] 若命题“ $\forall x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right], \tan 2x + 2 \geq m$ ”是假命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

考点3 不等式的性质、基本不等式

真题导向练

1. [2021·全国乙卷] 下列函数中最小值为4的是 ()
- A. $y=x^2+2x+4$
- B. $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$
- C. $y=2^x+2^{2-x}$
- D. $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$
2. (多选题)[2020·全国新高考I卷] 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 ()
- A. $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}$ B. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$
- C. $\log_2 a+\log_2 b\geq-2$ D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$
3. (多选题)[2022·新高考全国II卷] 若实数 x, y 满足 $x^2+y^2-xy=1$, 则 ()
- A. $x+y<1$
- B. $x+y\geq-2$
- C. $x^2+y^2\geq 1$
- D. $x^2+y^2\leq 2$
4. [2017·北京卷] 能够说明“设 a, b, c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为_____.
5. [2020·天津卷] 已知 $a>0, b>0$, 且 $ab=1$, 则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.
6. [2021·天津卷] 已知 $a>0, b>0$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.

7. [2020·江苏卷] 已知 $5x^2y^2+y^4=1 (x, y\in\mathbf{R})$, 则 x^2+y^2 的最小值是_____.

模拟预测练

8. [2024·重庆渝中区模拟] 若实数 a, b 满足 $ab=2$, 则 a^2+2b^2 的最小值为 ()
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$
- C. 4 D. $4\sqrt{2}$
9. [2024·北京房山区期末] 已知 a, b 为非零实数, 且 $a>b$, 则下列结论正确的是 ()
- A. $a^2>b^2$ B. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
- C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$ D. $\frac{1}{ab^2}>\frac{1}{a^2b}$
10. [2024·北京西城区一模] 设 $a=t-\frac{1}{t}, b=t+\frac{1}{t}, c=t(2+t)$, 其中 $-1<t<0$, 则 ()
- A. $b<a<c$ B. $c<a<b$
- C. $b<c<a$ D. $c<b<a$
11. [2024·湖北武汉期末] 已知正数 a, b 满足 $a+2b=1$, 则 ()
- A. $ab\geq\frac{1}{8}$ B. $ab>\frac{1}{8}$
- C. $0<ab\leq\frac{1}{8}$ D. $0<ab<\frac{1}{8}$
12. [2024·河北唐山一模] 已知函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$, 则 $f(x)$ 的最小值为 ()
- A. 0 B. 2
- C. $2\sqrt{2}$ D. 3

13. [2024·江苏南通二模] 设 $x > 0, y > 0, \frac{1}{x} + 2y = 2$, 则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $3 + 2\sqrt{2}$
C. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ D. 3

14. [2024·黑龙江哈尔滨模拟] 已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 则 $2xy - 3x$ 的最小值为 ()

A. 8 B. 9
C. 10 D. 11

15. [2024·吉林白山一模] 权方和不等式在求二元变量的最值时有很广泛的应用, 其内容为: 已知 a, b, x, y 都为正数, 则 $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, 当且仅当 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ 时, 等号成立. 则函数 $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{16}{1-3x} (0 < x < \frac{1}{3})$ 的最小值为 ()

A. 16 B. 25
C. 36 D. 49

16. [2024·浙江嘉兴二模] 若正数 x, y 满足 $x^2 - 2xy + 2 = 0$, 则 $x + y$ 的最小值是 ()

A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C. $2\sqrt{2}$ D. 2

17. [2024·山西晋城一模] 定义 $\min\{p, q, r\}$ 表示 p, q, r 中的最小值. 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0, abc = -1$, 则 ()

A. $\min\{a, b, c\}$ 的最大值是 -1
B. $\min\{a, b, c\}$ 的最大值是 $-\sqrt[3]{4}$
C. $\min\{a, b, c\}$ 的最小值是 -1
D. $\min\{a, b, c\}$ 的最小值是 $-\sqrt[3]{4}$

18. (多选题)[2024·长沙长郡中学期末] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $ab \neq 0$ 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
B. 若 $a < b$, 则 $a^3 < b^3$
C. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a}$
D. 若 $a|a| < b|b|$, 则 $a < b$

19. [2024·河北沧衡八校联盟联考] 若正数 a, b 满足 $a^2 + 2b = ab^2$, 则 b 的最小值是_____.

20. [2024·江西重点中学一联] 已知正数 x, y 满足 $x + y = 6$, 不等式 $a \leq \frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+2}$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

21. [2024·大连一模] 已知实数 $a > 0, b > 0$, 且 $ab(a + 8b) = 4$, 则 $a + 4b$ 的最小值为_____.

22. [2024·九省联考] 以 $\max M$ 表示数集 M 中最大的数, 设 $0 < a < b < c < 1$, 已知 $b \geq 2a$ 或 $a + b \leq 1$, 则 $\max\{b - a, c - b, 1 - c\}$ 的最小值为_____.



考点4 二次函数与一元二次方程、不等式

真题导向练

1. [2020·全国卷I] 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{-4, 1\}$ B. $\{1, 5\}$
C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3\}$
2. [2019·天津卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

模拟预测练

3. [2024·佳木斯三校模拟] 已知 α, β 是一元二次方程 $x^2 - 5x - 2 = 0$ 的两个不相等的实数根, 则 $\alpha + \beta + \alpha\beta$ 的值为 ()
A. -1 B. 2
C. 3 D. 7
4. [2024·山东滨州期末] 若不等式 $x^2 - ax + 4 \geq 0$ 对任意 $x \in [1, 3]$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $[0, 4]$ B. $(-\infty, 4]$
C. $(-\infty, \frac{13}{3}]$ D. $(-\infty, 5]$
5. [2024·云南保山期末] 已知不等式 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ 的解集为 A , 不等式 $\frac{x-2}{x-1} < 0$ 的解集为 B , 则 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的 ()
A. 充要条件
B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件
D. 既不充分也不必要条件

6. [2024·山东潍坊期末] 已知甲: $x \geq 1$, 乙:

$$\frac{x-a}{x-a-1} < 0 (a \text{ 为参数}, a \in \mathbf{R}).$$

若甲是乙的必要不充分条件, 则 a 的取值范围是 ()
A. $a \geq 1$ B. $a > 1$
C. $a < 0$ D. $a \leq 0$

7. [2024·重庆长寿区模拟] 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2x + a$, 对任意 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[1, +\infty)$ B. $[\frac{4}{5}, +\infty)$
C. $[\frac{4}{5}, 1]$ D. $(-\infty, \frac{4}{5}]$

8. [2024·长沙长郡中学一模] 函数 $f(x) = ax^3 - ax^2 + bx (a, b \in \mathbf{R})$ 有 3 个零点的充分不必要条件是 ()

A. $a \neq 0$, 且 $a > 4b$
B. $a > 0$, 且 $a < 4b$
C. $a < 0$, 且 $a > 4b, b \neq 0$
D. $a < 0$, 且 $a < 4b, b \neq 0$

9. [2024·重庆乌江新高考协作体联考] 若关于 x 的不等式 $0 \leq ax^2 + bx + c \leq 2 (a > 0)$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$, 则 $3a + b + 2c$ 的取值范围是 _____.

考点5 函数的概念及其表示

真题导向练

1. [2016·全国卷Ⅱ] 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ()

A. $y=x$ B. $y=\lg x$
C. $y=2^x$ D. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. [2015·湖北卷] 设 $x \in \mathbf{R}$, 定义符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \text{则} \quad ()$$

A. $|x|=x|\operatorname{sgn} x|$
B. $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$
C. $|x|=|x|\operatorname{sgn} x$
D. $|x|=x\operatorname{sgn} x$

3. [2017·山东卷] 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 < x < 1, \\ 2(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$ 若

$$f(a) = f(a+1), \text{ 则 } f\left(\frac{1}{a}\right) = \quad ()$$

A. 2 B. 4
C. 6 D. 8

4. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是 ()

A. $f(10) > 100$
B. $f(20) > 1000$
C. $f(10) < 1000$
D. $f(20) < 10\,000$

5. [2018·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$
C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

6. [2023·北京卷] 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

7. [2022·北京卷] 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$ 的定义域是 _____.

8. [2021·浙江卷] 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x > 2, \\ |x - 3| + a, & x \leq 2. \end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6})) = 3$, 则 $a =$ _____.

9. [2022·浙江卷] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \leq 1, \\ x + \frac{1}{x} - 1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$ _____; 若当 $x \in [a, b]$ 时, $1 \leq f(x) \leq 3$, 则 $b - a$ 的最大值是 _____.

10. [2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是 _____.

模拟预测练

11. [2024·山东滨州模拟] 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 则 $g(x) = \frac{f(3x-2)}{2x-3}$ 的定义域为 ()

A. $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$
B. $\left[1, \frac{5}{3}\right]$
C. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$
D. $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$

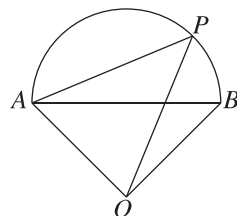
12. [2024·安徽合肥六校联盟联考] 设 $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 10, \\ f[f(x+7)], & x < 10, \end{cases}$ 则 $f(9) =$ ()

A. 10 B. 11
C. 12 D. 13

13. [2024·南通模拟] 已知 $f(x)$ 满足对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 则 $f(4) =$ ()
- A. 4 B. 8
C. 64 D. 256
14. [2024·江西赣州模拟] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f(2-x) = \frac{1}{x} - 1$, 则 $f(3)$ 的值为 ()
- A. $-\frac{7}{3}$ B. $-\frac{10}{9}$
C. $-\frac{4}{15}$ D. $-\frac{1}{6}$
15. [2024·江西吉安模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right), & x \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \log_{\frac{1}{e}} x, & \frac{2\pi}{3} < x \leq c, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域是 $[-2, 1]$, 则 c 的值为 ()
- A. $\frac{1}{e}$ B. e
C. e^2 D. $\frac{1}{e^2}$
16. [2024·石家庄模拟] 已知函数 $f(x) = |2x-1|$, 则当 $x \in [0, 1]$ 时, 曲线 $y = f[f(x)]$ 与直线 $y = 1$ 围成的区域的面积为 ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 2
17. (多选题) [2024·广东六校联考] 给定数集 $A = \mathbf{R}, B = (0, +\infty)$, x, y 满足方程 $2^x - y = 0$, 则下列对应关系 f 为函数的是 ()
- A. $f: A \rightarrow B, y = f(x)$
B. $f: B \rightarrow A, y = f(x)$
C. $f: A \rightarrow B, x = f(y)$
D. $f: B \rightarrow A, x = f(y)$
18. (多选题) [2024·广东惠州模拟] 德国数学家狄利克雷是解析数论的创始人之一, 他提出了著名的狄利克雷函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$ 以下关于 $D(x)$ 的说法正确的是 ()

- A. $D[D(x)] = 1$
B. $D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$
C. 存在无理数 x , 使得 $D(x+1) = D(x) + 1$
D. $\forall x \in \mathbf{R}, D(x+1) = D(-x-1)$

19. (多选题) [2024·辽宁抚顺六校协作体期末] 如图, 点 P 在以 AB 为直径的半圆上运动 (不含 A, B), $OA \perp OB, OA = OB$, 记 $AP = m, OP = n, \angle BAP$ 的弧度数为 t , 则下列说法正确的是 ()



- A. n 是 m 的函数 B. m 是 n 的函数
C. t 是 n 的函数 D. t 是 m 的函数
20. (多选题) [2024·重庆部分学校模拟] $\forall x \in \mathbf{R}, [x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 我们把 $f(x) = [x], x \in \mathbf{R}$ 称为取整函数, 以下关于“取整函数 $f(x) = [x]$ ”的说法正确的是 ()
- A. $\exists x \in \mathbf{R}, f(4x) = f(x) + 2$
B. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(2x)$
C. $\exists x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) > f(x) + f(y)$
D. $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 若 $[x] = [y]$, 则 $|x-y| > 1$
21. [2024·河北邢台期末] 若函数 $y = f(3x-2)$ 的定义域为 $[-2, 3]$, 则函数 $y = f(2x+3)$ 的定义域为 _____.
22. [2024·北京东城区模拟] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ x^2, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$ _____, 不等式 $f(x) < f(2x)$ 的解集是 _____.
23. [2024·济南一模] 已知集合 $A = \{u(x) \mid u(x) = ax^2 - (a+b)x + b, a, b \in \mathbf{R}\}$, 函数 $f(x) = x^2 - 1$. 若函数 $g(x)$ 满足对任意 $u(x) \in A$, 存在 $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 使得 $u(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, 则 $g(x)$ 的解析式可以是 _____. (写出一个满足条件的函数解析式即可)

题型 1 函数、导数压轴小题

考向 1 函数性质的综合问题

真题导向练

- [2020 · 全国卷 I] 若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2\log_4 b$, 则 ()
A. $a > 2b$ B. $a < 2b$
C. $a > b^2$ D. $a < b^2$
- (多选题)[2023 · 新课标 I 卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()
A. $f(0) = 0$
B. $f(1) = 0$
C. $f(x)$ 是偶函数
D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点
- (多选题)[2022 · 新高考全国 I 卷] 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$, $g(2+x)$ 均为偶函数, 则 ()
A. $f(0) = 0$
B. $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
C. $f(-1) = f(4)$
D. $g(-1) = g(2)$

模拟预测练

- [2024 · 福建漳州模拟] 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, $f(2x+1)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(3-x) = -4$, $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, $f(4) = 2$, 则 $f(22) + g(24) =$ ()
A. 4 B. 8
C. -4 D. -6
- [2024 · 江西重点中学协作体联考] 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x+1)$, 且 $f(2+x) - f(2-x) = 4x$, $g(3+x)$ 为偶函数, 则 $g'(7) + g(17) =$ ()
A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

- (多选题)[2024 · 大连一模] 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的可导函数, 若 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$, 且 $f'(0) = -3$, 则 ()
A. $f(x)$ 是奇函数
B. $f(x)$ 是减函数
C. $f(\sqrt{3}) = 0$
D. $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- (多选题)[2024 · 山东聊城模拟] 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 其导数为 $g(x)$, 若 $f(3x+1)$ 是奇函数, 且对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(4-x) = f(x)$, 则对于任意的 $k \in \mathbf{Z}$, 下列说法正确的是 ()
A. $4k$ 都是 $g(x)$ 的周期
B. 曲线 $y = g(x)$ 关于点 $(2k, 0)$ 对称
C. 曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = 2k + 1$ 对称
D. $g(x + 4k)$ 都是偶函数
- (多选题)[2024 · 青岛一模] 已知函数 $f(x) = \cos x + \left| \sin \frac{x}{2} \right|$, 则下列说法正确的是 ()
A. $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增
B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称
C. $f(x)$ 的值域为 $\left[0, \frac{9}{8}\right]$
D. 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 内有实数根, 则所有根之和组成的集合为 $\{\pi, 2\pi, 4\pi\}$
- [2024 · 苏锡常镇一模] 已知 $a, b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $4\log_a b + \log_b a = 4$, 则 $\frac{2}{b} + \ln \frac{a}{b}$ 的最小值为_____.
- [2024 · 湖北八市联考] 记 $\max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, $\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则 $\min_{m \in [-3, 3]} \{ \max_{n \in [0, 9]} \{ |m + n - 2\sqrt{n}| \} \} =$ _____.

考向2 利用导数解决函数综合问题

真题导向练

11. [2021·新高考全国I卷] 若过点 (a, b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线,则 ()

- A. $e^b < a$ B. $e^a < b$
C. $0 < a < e^b$ D. $0 < b < e^a$

12. [2022·全国甲卷] 已知 $a = \frac{31}{32}, b = \cos \frac{1}{4}, c = 4\sin \frac{1}{4}$,则 ()

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$
C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

13. [2021·新高考全国II卷] 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|, x_1 < 0, x_2 > 0$,函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线互相垂直,且分别与 y 轴交于 M, N 两点,则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是_____.

14. [2022·全国乙卷] 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的极小值点和极大值点.若 $x_1 < x_2$,则 a 的取值范围是_____.

模拟预测练

15. [2024·浙江杭州期末] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\sin xf(x) + \cos xf'(x) > 0$,其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数,则 ()

- A. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
B. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
C. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

16. [2024·安徽池州期末] 下列不等关系中错误的是 ()

- A. $\frac{\ln 2}{2} < \frac{\ln 3}{3}$
B. $be^a > ae^b (a > b > 1)$
C. $\cos \frac{1}{4} < \frac{31}{32}$
D. $\sin \frac{7}{2} + \frac{7}{2} > \pi$

17. (多选题)[2024·浙江五校联盟联考] 已知函数 $f(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$,则 ()

- A. $f(x)$ 的零点为 $x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$
B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$
C. 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,若 $f(x) \geq kx$ 恒成立,则 $k \leq \frac{2}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$
D. 当 $x \in \left[-\frac{1003\pi}{2}, \frac{1005\pi}{2}\right]$ 时,过点 $\left(\frac{\pi-1}{2}, 0\right)$ 作 $f(x)$ 的图象的所有切线,则所有切点的横坐标之和为 502π

18. [2024·华南师大附中期中] 已知实数 a, b 满足 $e^a + \cos(a+b) = a$,则 a 的值是_____, b 的取值集合是_____.

19. [2024·深圳一调] 已知函数 $f(x) = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)(x-x_3) (a > 0)$,设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_i, f(x_i))$ 处切线的斜率为 $k_i (i=1, 2, 3)$,若 x_1, x_2, x_3 均不相等,且 $k_2 = -2$,则 $k_1 + 4k_3$ 的最小值为_____.

20. [2024·江西师大附中期中] 若函数 $f(x) = 2\log_a x + |2x-1| (a > 0, a \neq 1)$ 的最小值为1,则实数 a 的值为_____.

题型2 导数的综合应用

真题导向练

1. [2024·新课标II卷] 已知函数 $f(x)=e^x-ax-a^3$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若 $f(x)$ 有极小值,且极小值小于 0,求 a 的取值范围.

2. [2023·新课标I卷] 已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $a>0$ 时, $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

3. [2024·全国甲卷] 已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)若 $a=-2$,求 $f(x)$ 的极值;

(2)当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$,求 a 的取值范围.

4. [2022 · 全国乙卷] 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + axe^{-x}$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1, 0), (0, +\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

6. [2023 · 新课标II卷] (1) 证明: 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$;
- (2) 已知函数 $f(x) = \cos ax - \ln(1-x^2)$, 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.

5. [2024 · 新课标I卷] 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$.
- (1) 若 $b=0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;
- (2) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;
- (3) 当 $1 < x < 2$ 时, $f(x)$ 的取值范围是 $(-2, +\infty)$, 求 b 的取值范围.

7. [2022 · 新高考全国Ⅱ卷] 已知函数 $f(x) = xe^{ax} - e^x$.

(1) 当 $a=1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x>0$ 时, $f(x)<-1$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \ln(n+1)$.

9. [2024 · 大连一模] 已知函数 $f(x) = x \ln x + ax + 1$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $x>1$ 时, 证明: $e^x \ln x > e(x-1)$.

模拟预测练

8. [2024 · 吉林白山模拟] 已知函数 $f(x) = 2 \ln x - mx + 2$.

(1) 若 $m=3$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq 0$, 求实数 m 的取值范围.

10. [2024 · 江西赣州模拟] 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $m > 0$, 若函数 $g(x) = f(x) - m(x-1)$ 有唯一的零点 x_0 , 证明: $1 < x_0 < 2$.

11. [2024 · 湖北八市联考] 英国数学家泰勒发现的泰勒公式有如下特殊形式: 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 阶导数都存在时, $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$.

注: $f''(x)$ 表示 $f(x)$ 的 2 阶导数, 即为 $f'(x)$ 的导数, $f^{(n)}(x) (n \geq 3)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导数, 该公式也称麦克劳林公式.

(1) 根据该公式估算 $\sin \frac{1}{2}$ 的值 (精确到小数点后两位);

(2) 由该公式可得 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$,

当 $x \geq 0$ 时, 试比较 $\cos x$ 与 $1 - \frac{x^2}{2}$ 的大小, 并给出证明;

(3) 设 $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k) \tan \frac{1}{n+k}} >$

$$n - \frac{1}{4n+2}.$$

名校联考模拟练(一) 2024 届江西五市九校 2 月联考

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $(2+2i)(3-2i)=$ ()

- A. $-10+2i$ B. $-10-2i$
C. $10+2i$ D. $10-2i$

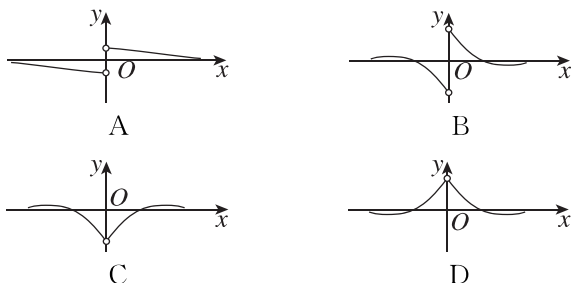
2. 已知集合 $M=\{a^2, -1\}$, $N=\{a, a^2-5\}$, 若 $M \cap N = \{1\}$, 则 $a=$ ()

- A. -1 B. 1
C. ± 1 D. -1 或 -2

3. 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. 0 B. 1
C. -1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

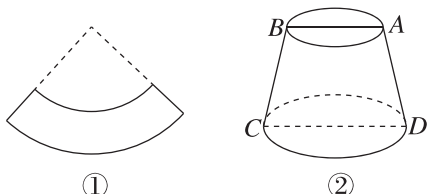
4. 函数 $f(x) = \frac{|x|}{2^x - 2^{-x}}$ 的大致图象为 ()



5. 已知 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, A, B 分别为椭圆 C 的上顶点和右顶点, 若 $\triangle ABF$ 的周长为 $3a$, 则椭圆 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

6. 某班级举行“变废为宝”手工活动, 某学生用扇形纸壳裁成扇环(如图①)后, 制成了简易笔筒(如图②)的侧面, 在它的轴截面 $ABCD$ 中, $AB = AD = 10$ cm, $CD = 15$ cm, 则原扇形纸壳中扇形的圆心角为 ()

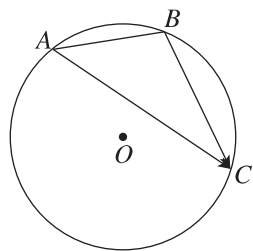


- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$
C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

7. 过原点 O 的直线 $l: y=kx$ 与圆 $M: x^2 - 6x + y^2 - 6y + 16 = 0$ 交于 A, B 两点, 且 $|OA| = |AB|$, 则 $k=$ ()

- A. 1 B. 2
C. $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{2}$

8. 如图, 已知圆 O 的半径为 2 , AB 为圆 O 的一条弦, 且 $AB=2$, C 为圆 O 上一动点, 则 $\vec{AC} \cdot \vec{BC}$ 的取值范围为 ()



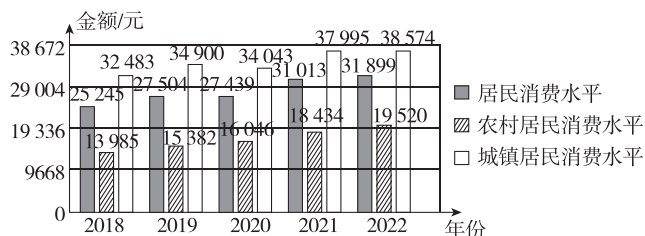
- A. $[0, 4]$
B. $[5-4\sqrt{3}, 5+4\sqrt{3}]$
C. $[6-4\sqrt{3}, 6+4\sqrt{3}]$
D. $[7-4\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}]$

二、选择题:在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.

9. 国家统计局发布的 2018 年至 2022 年我国居民消费水平情况如图所示, 则下列说法错误的是 ()

(居民消费水平:

$$\frac{\text{农村居民消费水平} \times \text{农村人口数} + \text{城镇居民消费水平} \times \text{城镇人口数}}{\text{农村人口数} + \text{城镇人口数}})$$



- A. 2018 年至 2022 年我国居民消费水平逐年提高
B. 2018 年至 2022 年我国城镇居民消费水平逐年提高
C. 2018 年至 2022 年我国居民消费水平数据的 60% 分位数为 27 504
D. 2022 年我国城镇人口数比农村人口数的 1.5 倍还要多

10. 已知函数 $f(x) = |\sin x - 1|$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称
- C. $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$
- D. 将函数 $y = -\sin x$ 的图象向上平移一个单位长度可以得到 $f(x)$ 的图象

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cdot [f(x) - f(x-y)] = f(xy)$, 当 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, $f(x) \neq 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- B. $f(10) = 1$
- C. $f(x)$ 是奇函数
- D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

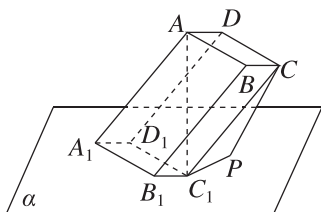
三、填空题: 将答案填在题中横线上.

12. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , P 为抛物线上任意一点, 点 $A(1, 3)$, 则 $|PF| + |PA|$ 的最小值为_____.

13. 如图, 小王一次买了两串冰糖葫芦, 其中一串上有两颗山楂, 另一串上有三颗山楂. 若小王每次随机从其中一串上吃一颗, 则只有两颗山楂的这串先吃完的概率为_____.



14. 如图, 将正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 斜立在平面 α 上, 顶点 C_1 在平面 α 内, $AC_1 \perp$ 平面 α , $AA_1 = 2AB = 6$, 点 P 在平面 α 内, 且 $PC_1 = \sqrt{3}$. 若将该正四棱柱绕 AC_1 旋转, 则 PC 的最大值为_____.



四、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2x-a}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处的切线过点 $(4, 2)$, 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) \leq ae^{x-1}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.